Indução Matemática Forte

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

raquel@ic.uff.br

29 de novembro de 2016

Sequência de Fibonacci

- É uma sequência de números naturais $\{F_1, F_2, F_3, ...\}$, denotada por $\{F_n\}$ definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 3 \end{cases}$$

Sequência de Fibonacci

- Ou seja, os temos F_n, $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	…
1	1							

Sequência de Fibonacci

- Ou seja, os temos F_n, $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2						

Sequência de Fibonacci

- Ou seja, os temos F_n, $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3					

Sequência de Fibonacci

- Ou seja, os temos F_n, $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3	5				

Sequência de Fibonacci

- Ou seja, os temos F_n, n ≥ 3 são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3	5	8			

Sequência de Fibonacci

- Ou seja, os temos F_n, $n \geq 3$ são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3	5	8	13		

Sequência de Fibonacci

- Ou seja, os temos F_n, n ≥ 3 são calculados recursivamente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3	5	8	13	21	...

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \cdot F_2$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \, . \, F_2$

$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \,.\, F_2$

$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2 . F_3$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \,.\, F_2$$

$$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2.F_3$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \,.\, F_2$

$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2.F_3$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = F_3.F_4$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \,.\, F_2$

$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2.F_3$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = F_3.F_4$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \,.\, F_2$

$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2.F_3$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = F_3.F_4$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = F_4.F_5$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \, . \, F_2$

$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2.F_3$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = F_3.F_4$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = F_4.F_5$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 40$

Sequência de Fibonacci

- Observe a seguinte propriedade:

Somando os termos da sequência de Fibonacci elevada ao quadrado:

$$F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 \,.\, F_2$$

$$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = F_2.F_3$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = F_3.F_4$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = F_4.F_5$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 40 = F_5.F_6$$

Exemplo 1: Mostre que $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Indução Forte x Indução Fraca

- A indução forte difere da indução fraca (ou simples) apenas na suposição da hipótese.
- No caso da indução forte, devemos supor que a propriedade vale para todos os casos anteriores, não somente para o anterior, ou seja:

(1) Base da indução: demonstramos P(1)

(2) Hipótese de Indução Forte: Supomos que P(k) é verdadeiro, para todo $k \leq n$

(3) Passo da Indução: Provamos que P(k+1) é verdadeiro a partir da Hipótese de Indução (2).

Exemplo 2: Considerando a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$, mostre que $F_n < (7/4)^n$, para todo n natural

Indução Forte Generalizada

- Lembremos a formulação da IF:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se:

(i) P(1) verdadeira e

(ii) P(1), P(2), ... , P(k) verdadeira => P(k+1) verdadeira

Então <u>P(n) verdadeira</u> $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

Para aplicarmos a IF generalizada precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da indução:

Mostrar que $P(n)$ verdadeira para $n = n_0$

(2) Hipótese de indução:

Assumir que $P(n_0)$, $P(n_0 + 1)$, ... , $P(k)$ são verdadeiras ($\forall\ k \geq n_0$)

(3) Passo indutivo:

Mostrar que $P(k + 1)$ verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2)

Exemplo 3: Mostre que todo natural maior do que 1 é primo ou produto de primos.

Exemplo 3: Mostre que todo natural maior do que 1 é primo ou produto de primos.

- **OBS:** primo é um inteiro maior do que 1, que só é divisível por 1 e por ele mesmo.

  Exemplos: 2, 3, 5, 7 são números primos

Exercícios:

1- Demonstre que para todo natural x > 1 e n, $x^n - 1$ é divisível por x- 1.

2- Mostre que $\sum_{i=1}^{n} 3+5i = 2{,}5n^2 + 5{,}5n$.

3- Mostre que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in N$.

4- Prove que todo número pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

5- Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1, \forall\, n \in N$.

6- Mostre que $n^2 > 3n, \forall\, n \geq 4, n \in N$.